7 класс

Задача 1. В ребусе ЯЕМЗМЕЯ = 2020 замените каждую букву в левой части равенства цифрой или знаком арифметического действия (одинаковые буквы одинаково, разные — по-разному) так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример, пояснений не требуется. [***4 балла***] (*А. А. Заславский, О. А. Заславский*)

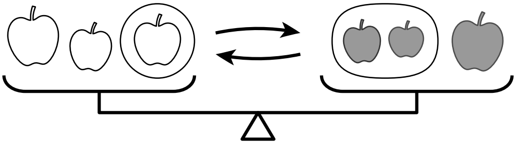
Ответ. $2 \times 505 \times 2 = 2020$.

Задача 2. См. задачу 2 для 6 класса. [***4 балла***]

Задача 3. На столе лежат 6 яблок (не обязательно одинакового веса). Таня разложила их по 3 на две чашки весов, и весы остались в равновесии. А Саша разложил те же яблоки по-другому: 2 яблока на одну чашку и 4 на другую, и весы опять остались в равновесии. Докажите, что можно положить на одну чашку весов одно яблоко, а на другую два так, что весы останутся в равновесии. [***6 баллов***]
(*А. В. Шаповалов*)

Решение. Посмотрим на три яблока, которые Таня положила на одну из чаш. Назовём их зелёными.

Могли ли все они и у Саши попасть на одну чашу? Нет, так их вес — это уже половина общего веса яблок. Значит, два зелёных яблока окажутся на одной из чаш, а третье на другой. Могли ли на одной чаше остаться только эти два зелёных яблока? Нет, так как их вес — меньше половины общего веса. Значит, к ним Саша добавил два яблока с другой чаши (назовём их красными).

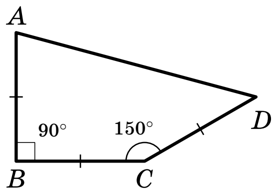


То есть у Тани на одной чаше лежали три зелёных яблока, а у Саши на одной из чаш лежит два зелёных яблока и два красных. От замены одного из зелёных яблок на два красных общий вес яблок на чаше не поменялся (он равен половине общего веса яблок). Значит, мы нашли яблоко, которое весит столько же, сколько два других.

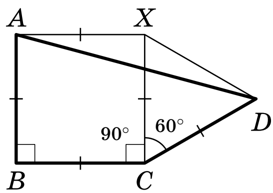
Задача 4. Три стороны четырёхугольника равны, а углы четырёхугольника, образованные этими сторонами, равны 90° и 150°. Найдите два других угла этого четырёхугольника. [***8 баллов***] (*М.А. Волчкевич*)

Ответ. 45° и 75°.

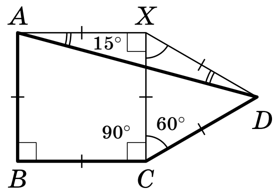
Решение. Обозначим вершины четырёхугольника как на рисунке.



Достроим ABC до квадрата $ABCX$. В треугольнике XCD угол XCD равен $\angle BCD - \angle BCX = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$, а стороны CX и CD равны. Значит, треугольник XCD — равнобедренный с углом 60°, т. е. равносторонний (в частности, отрезок XD также равен стороне квадрата).



Теперь, когда мы поняли, что наш четырёхугольник получается из квадрата и правильного треугольника, можно посчитать его углы. Треугольник AXD равнобедренный с углом $90° + 60° = 150°$ при вершине.



Поэтому

$$\angle XAD = \angle XDA = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Значит,

$$\angle BAD = \angle BAX - \angle XAD = 90° - 15° = 75°;$$
$$\angle ADC = \angle XDC - \angle XDA = 60° - 15° = 45°.$$

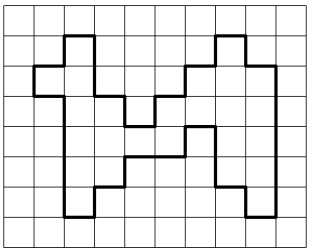
Задача 5. См. задачу 5 для 6 класса. **[*8 баллов*]**

Задача 6. Можно ли данную фигуру («верблюда») разбить

а) по линиям сетки;

б) не обязательно по линиям сетки

на 3 части, из которых можно сложить квадрат?



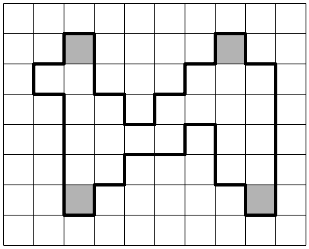
[*а) 4 балла; б) 6 баллов*]

(*Ю. С. Маркелов, ученик 10 класса*)

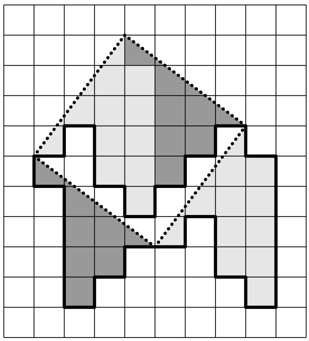
Ответ. а) Нельзя; б) можно.

Решение. Заметим, что площадь верблюда — 25 клеток. То есть складывать нам предстоит квадрат со стороной 5.

а) Посмотрим на 4 клетки, отмеченные на рисунке. Любые две из них «далеко друг от друга»: разделены минимум 4 строками или столбцами. Поэтому при разрезании две отмеченные клетки не могут попасть в одну часть (такая часть не уместилась бы в квадрат 5×5). Значит, чтобы сложить квадрат 5×5, верблюда необходимо разрезать хотя бы на 4 части (если резать по клеточкам).



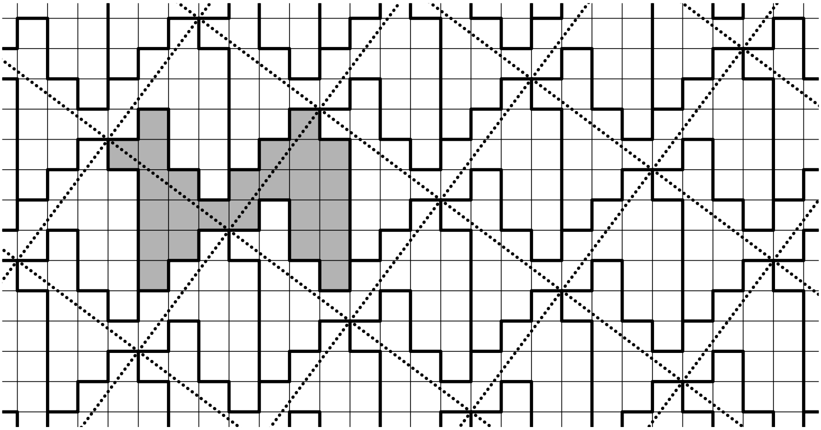
б) Как разрезать верблюда и сложить квадрат — показано на рисунке.



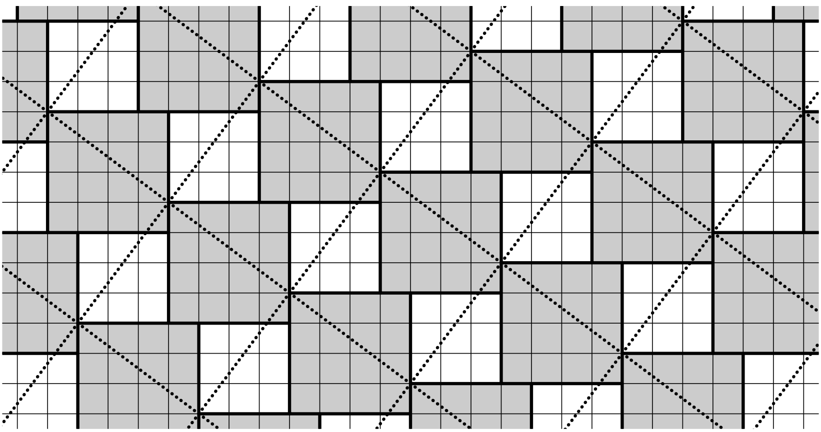
Комментарии. 1. Решив пункт а), можно догадаться, что в пункте б) сторона квадрата должна идти не по линиям сетки. Чтобы найти на клетчатой бумаге отрезок длины 5, не идущий по линиям сетки, полезно вспомнить про египетский треугольник (прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5).

2. Можно заметить, что сдвинутыми копиями верблюда можно замостить плоскость как паркетом (см. рис.). Отметив соответствующие точки верблюдов (на рисунке взяты «носы»), мы увидим, что они расположены в вершинах квадратной решетки.

Посмотрим на один из таких квадратов. Каждая его часть — кусочек одного из сдвинутых верблюдов. Сдвинув их обратно, мы получим разрезание исходного верблюда на части, из которых можно сложить квадрат. Остаётся найти такое положение квадрата, при котором частей получается три.



Подобным образом замощения помогают решить разные задачи на разрезание. Например, при помощи замощения квадратами, показанного ниже, можно доказать теорему Пифагора!



XVIII устная городская олимпиада по математике
для 6–7 классов
состоится 22 марта 2020 года.

Подробности и регистрация: `olympiads.mccme.ru/ustn/`